Análisis Armónico y Teoría de Aproximaciones.

Primera lista de ejercicios.

Ejercicio 1 Consideremos la aplicación $\hat{}: L^2([0,1)) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{f} = \left(\hat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ con $\hat{f}(k) = \displaystyle\int_{[0,1)} f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx$. Mostrar que dicha aplicación es sobreyectiva.

Ejercicio 2 Mostrar que la serie de Fourier asociada a la función $f(t) = t$, con $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, converge puntualmente en cada punto de dicho intervalo.

Ejercicio 3

(a) Probar que si $(a_k)_{k\geq 0}$ es una sucesión convergente, entonces es Cesàro convergente al mismo límite.

(b) Mostrar que si la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k$ es C-sumable, entonces es A-sumable.

Ejercicio 4

(a) Probar que toda base de Hamel de un espacio vectorial de dimensión infinita es no-numerable.

(b) Sea $C_0 = \left\{ a = (a_k)_{k\geq 0} \;:\; \lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0 \right\}$. Probar que la base 'natural' $\{e_k\}_k$ es una base de Schauder de $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Ejercicio 5 Sea $\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2},1)}$ la función de Haar; y sean $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ con $k, j \in \mathbb{Z}$. Probar que $\mathcal{H} = \{\psi_{jk} \;:\; k, j \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.